Le problème de Steiner dans le plan euclidien

Antoine Clausse

Sommaire

1 Définitions **2**

1.1 Arbre couvrant minimal 2

1.2 Arbre de Steiner 2

1.3 Exemples 2

2 Construction d'un arbre de Steiner **3**

2.1 Pour un ensemble de 3 points : Point de Fermat . 3

2.2 Pour un ensemble de points quelconque 5

2.3 Ratio de Steiner 6

3 Algorithme **7**

3.1 Un problème NP-difficile 7

3.2 Un algorithme 7

3.3 Complexité de l'algorithme 8

4 Applications **9**

4.1 Bulles de savon : Expérience 9

4.2 Autres exemples 9

1 Définitions

Soit E un ensemble de points du plan.

1.1 Arbre couvrant minimal

Ensemble d'arêtes connectant tous les points de E dont la somme des longueurs est minimale.
Chaque arête a pour extrémités 2 points de l'ensemble E.

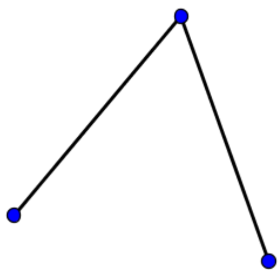
1.2 Arbre de Steiner

Ensemble d'arêtes connectant tous les points de E dont la somme des longueurs est minimale.

Les nouveaux points créés sont les points de Steiner.

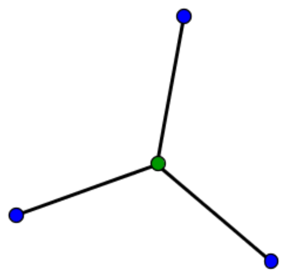
1.3 Exemples

Arbre couvrant minimal



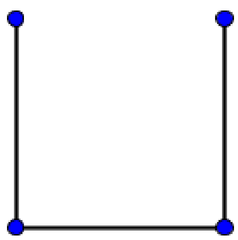
$L = 2$

Arbre de Steiner



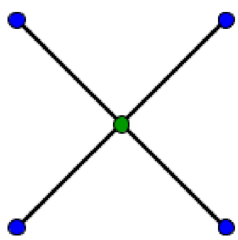
$L = \sqrt{3}$
-13.4%

Arbre couvrant minimal



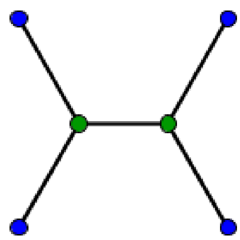
$L = 3$

Avec 1 point d'intersection



$L = 2\sqrt{2}$
-5.72%

Arbre de Steiner



$L = 1 + \sqrt{3}$
-8.93%

2 Construction d'un arbre de Steiner

2.1 Pour un ensemble de 3 points : Point de Fermat

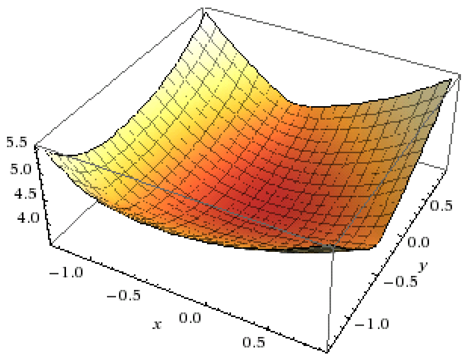
Dans un triangle ABC, le point de Fermat est l'unique point I tel que la somme $IA + IB + IC$ est minimale.

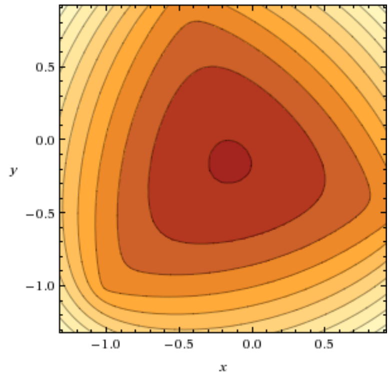
<u>**Etude du minimun d'une fonction de 2 variables.**</u>

Sur un compact K contenant le triangle, on définit :

$$\begin{array}{rccl} f: & K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & \|\overrightarrow{PA}\| + \|\overrightarrow{PB}\| + \|\overrightarrow{PC}\| \end{array}$$

Différentiable sur $\overset{o}{K} \setminus \{A, B, C\}$



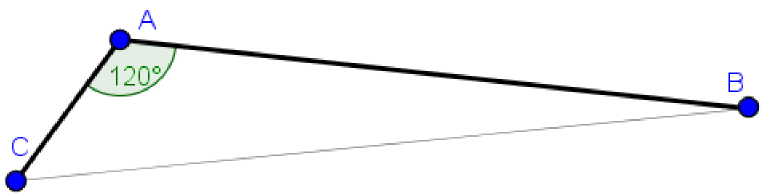


Allure de f

$$\overrightarrow{grad}f(P) = \frac{\overrightarrow{PA}}{\|\overrightarrow{PA}\|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{\|\overrightarrow{PB}\|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{\|\overrightarrow{PC}\|}$$

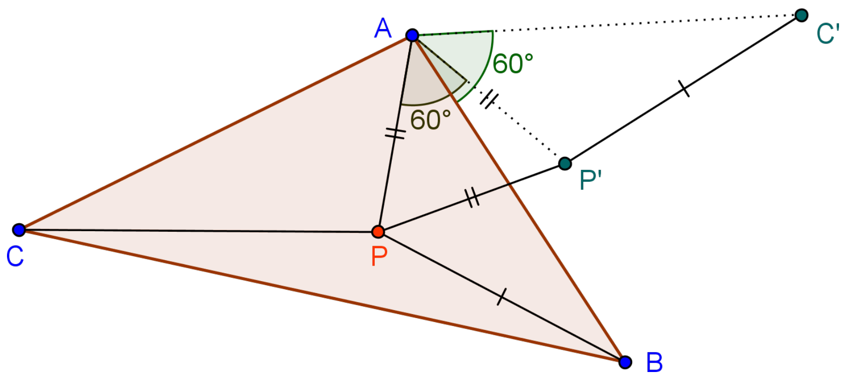
$$\overrightarrow{grad}f(P) = \overrightarrow{0} \iff \widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120°$$

Un tel point n'existe que si tous les angles du triangle sont inférieurs à 120° : **Le point de Fermat d'un triangle dont un angle est supérieur à 120° est le sommet en lequel cet angle est réalisé.**



$$\widehat{CAB} \geq 120°$$

Etude géométrique

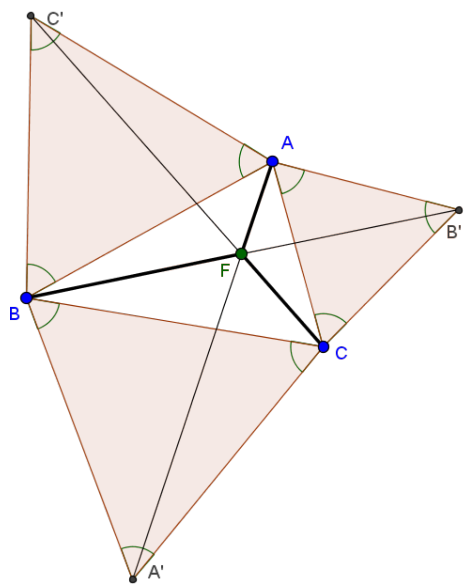


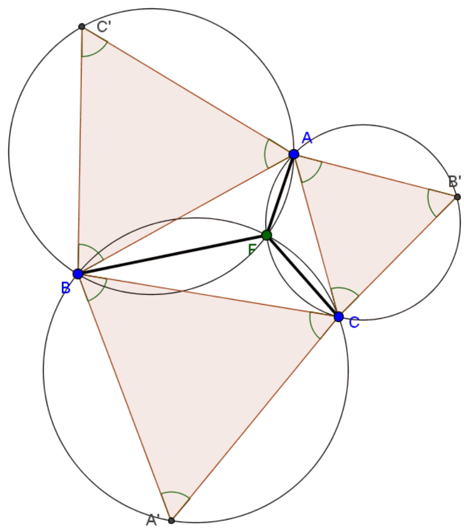
Chaque angle $\leq 120°$

$$\begin{cases} PA = P'P \\ PB = C'P' \end{cases} \Longrightarrow \boxed{PA + PB + PC = C'P' + P'P + PC}$$

Pour minimiser $PA + PB + PC$, il faut placer P sur (CC'), de façon à aligner C, P, P' et C'. Donc $F \in (CC')$.

Le point de Fermat d'un triangle dont tous les angles sont inférieurs à $120°$ est le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC').



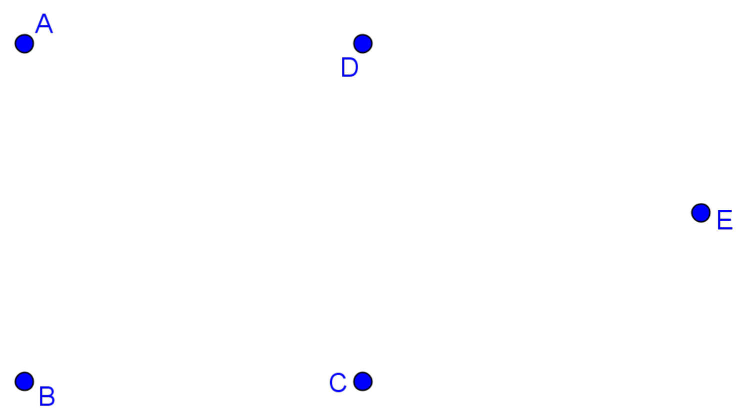


Constructions du point de Fermat

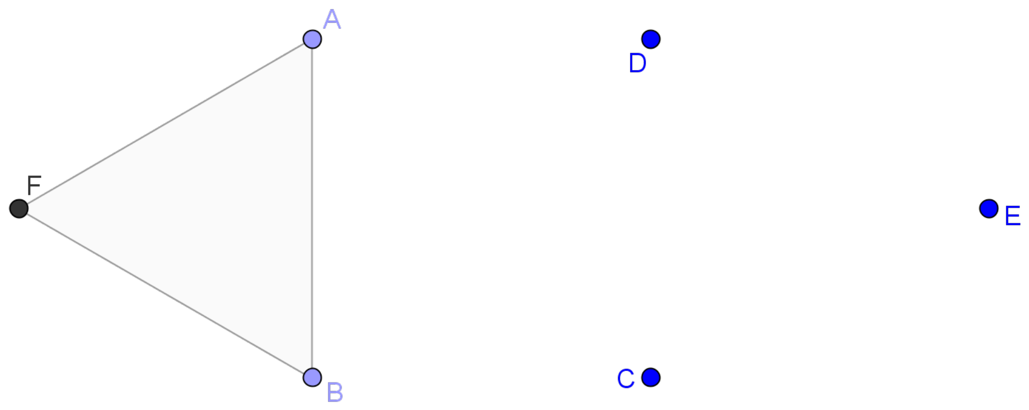
Coordonnées du point de Fermat :

$$F = \frac{\frac{BC}{\sin(\widehat{A}+\frac{\Pi}{3})}A + \frac{AB}{\sin(\widehat{B}+\frac{\Pi}{3})}B + \frac{CA}{\sin(\widehat{C}+\frac{\Pi}{3})}C}{\frac{BC}{\sin(\widehat{A}+\frac{\Pi}{3})} + \frac{CA}{\sin(\widehat{B}+\frac{\Pi}{3})} + \frac{AB}{\sin(\widehat{C}+\frac{\Pi}{3})}}$$

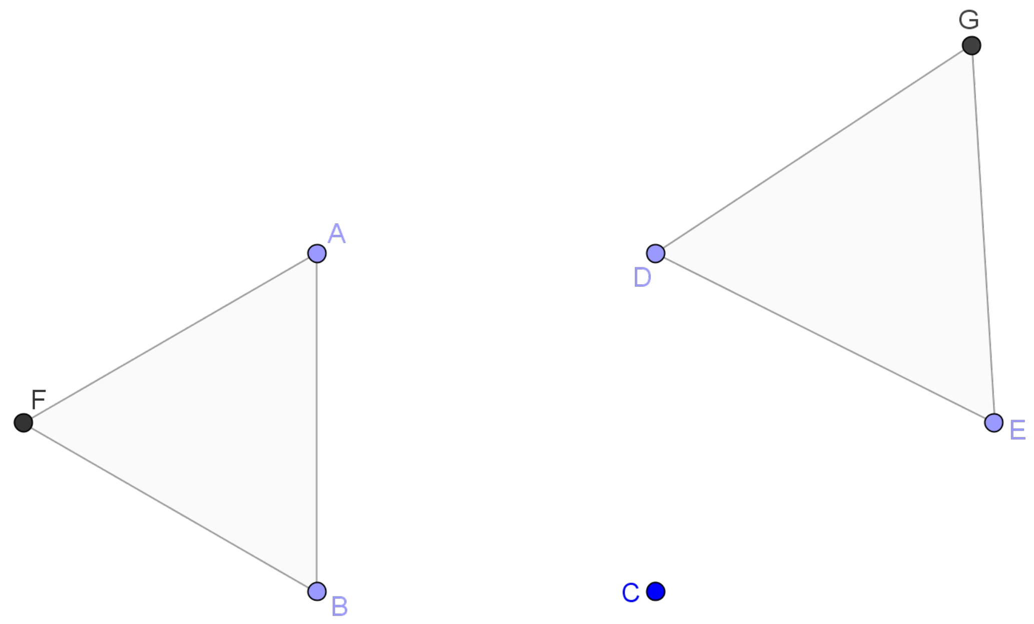
2.2 Pour un ensemble de points quelconque



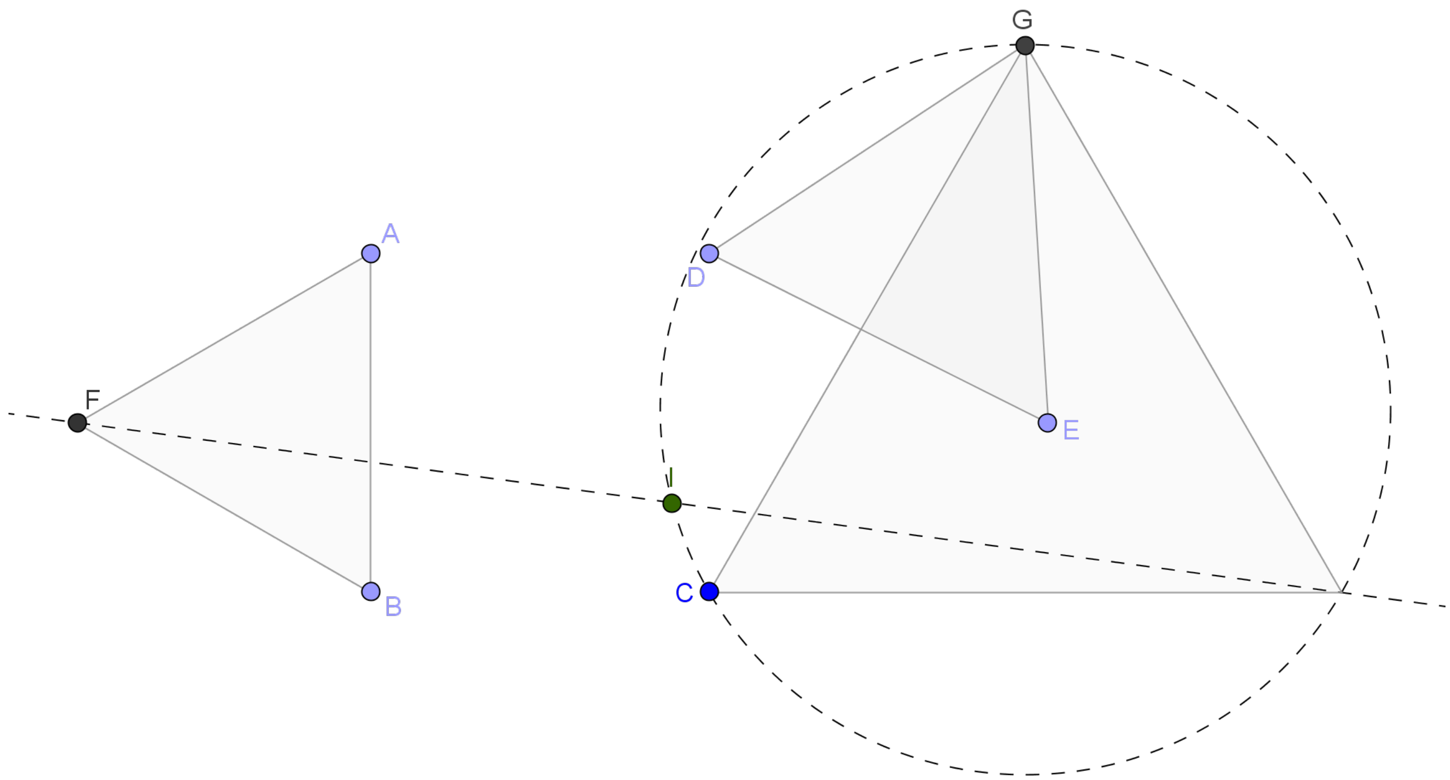
Pour un ensemble de points quelconque



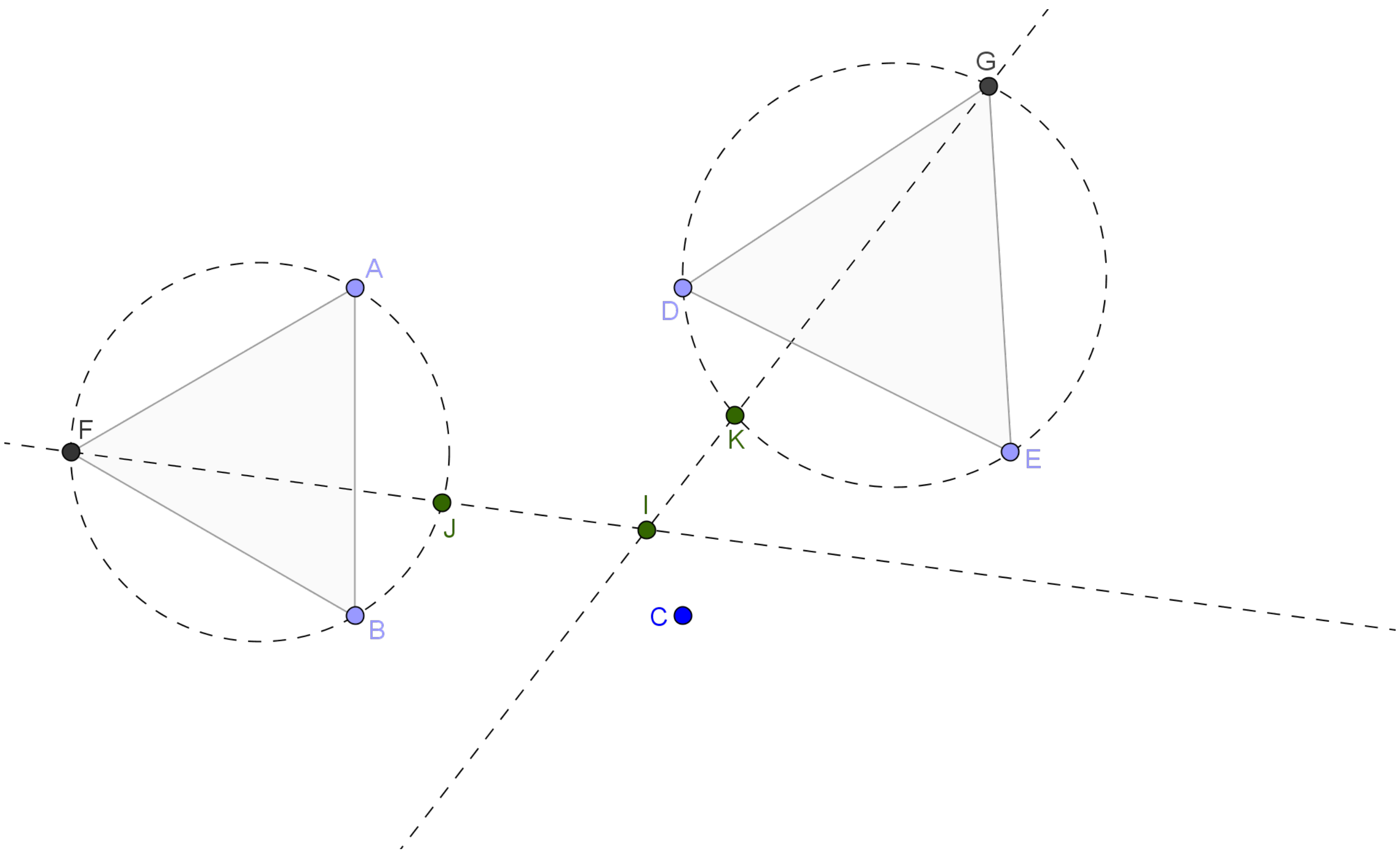
Pour un ensemble de points quelconque



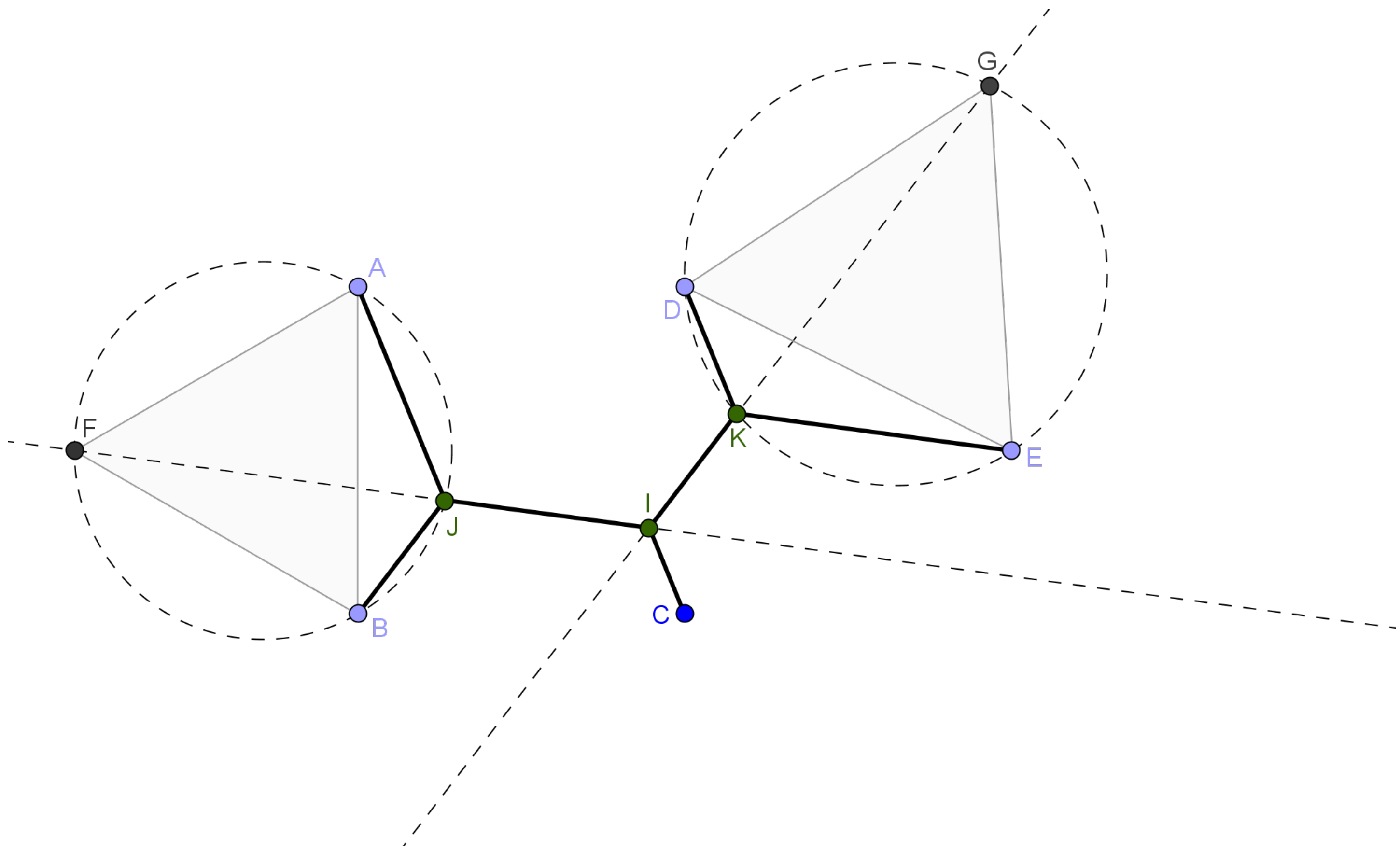
Pour un ensemble de points quelconque



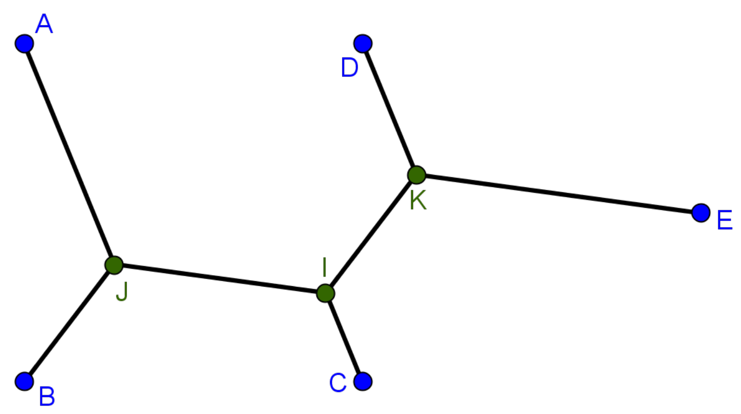
Pour un ensemble de points quelconque



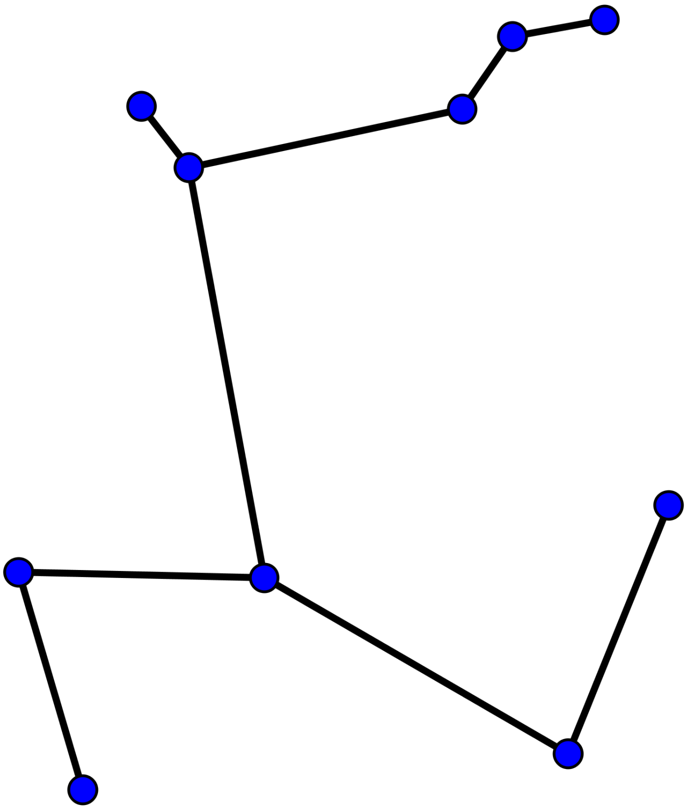
Pour un ensemble de points quelconque



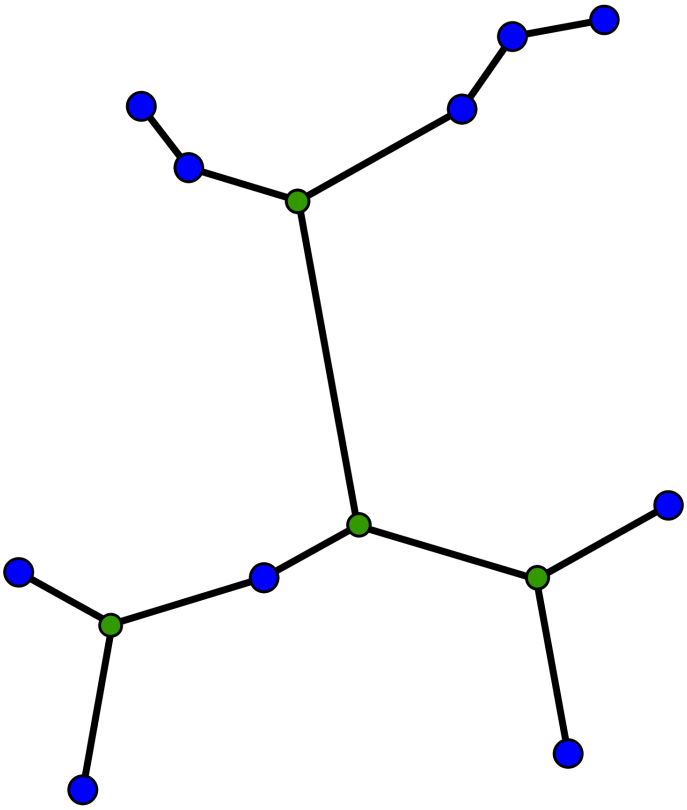
Pour un ensemble de points quelconque



Exemple



Arbre couvrant minimal

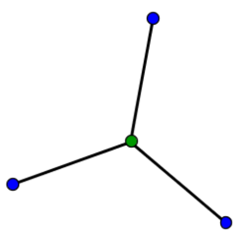


Arbre de Steiner

Dans cet exemple, l'arbre de Steiner est 5.8% plus court que l'arbre couvrant minimal.

2.3 Ratio de Steiner

$$\rho = \inf_X \frac{l(ReseauDeSteiner(X))}{l(ArbreCouvrantMinimal(X))}$$



Dans le plan euclidien, $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ (économie de 13.4%).
La valeur de ρ diminue quand la dimension de l'espace augmente.
Dans $\mathbb{R}^3$, il a été approximé à 0.784190. (économie de 21.6%)

3 Algorithme

3.1 Un problème NP-difficile

NP-difficile : On ne peut pas le résoudre en un temps polynomial du nombre de paramètres (de points).

Problème NP-difficile $\Rightarrow$ résolution très lente.

Mais des algorithmes permettent d'approximer la solution en un temps polynomial.

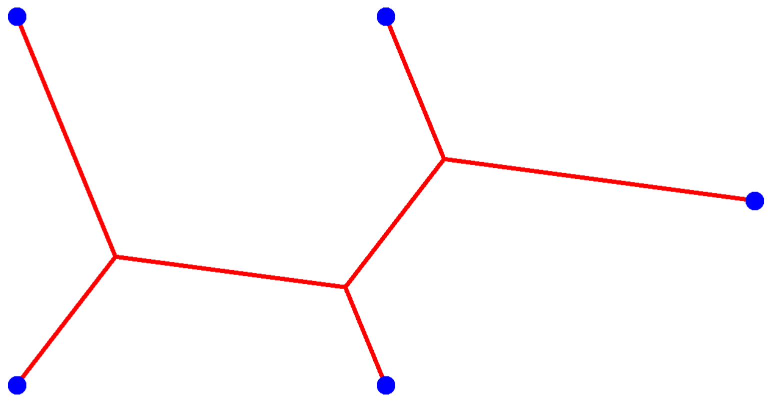
3.2 Un algorithme

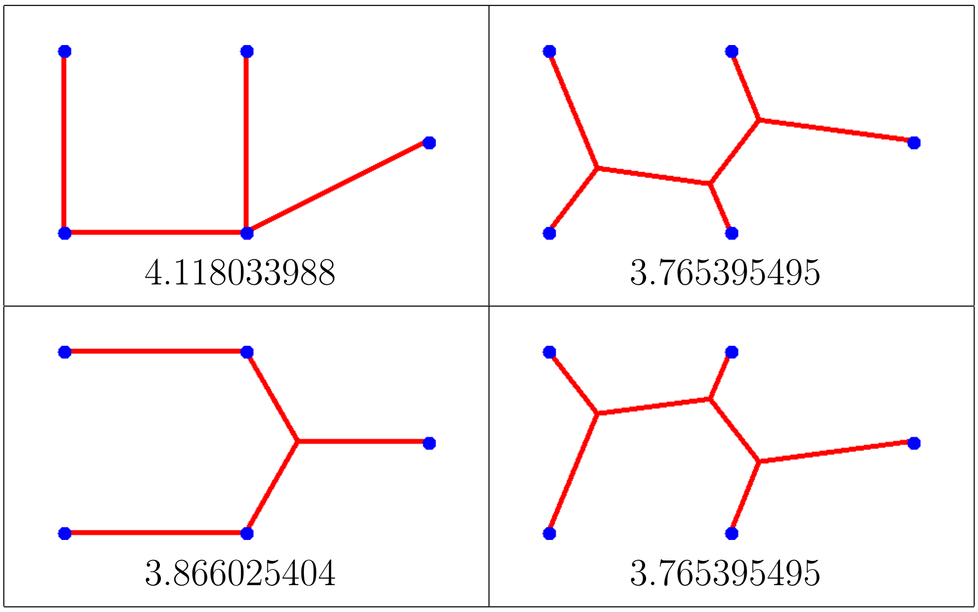
Cette procédure s'inspire de l'algorithme de *Dreyfus-Wagner*.

Algorithm 1 Détermine le réseau de Steiner minimal d'un ensemble de points

Entrée L : un ensemble de points
  $n := nops(L)$;
  if $n \leq 1$ **then**
    $R := []$;
  else if $n = 2$ **then**
    $R := [L[1], L[2]]$;
  else if $n = 3$ **then**
    $R :=$ Fermat(L) ;
  else
    $ReseauCandidat :=$ ArbreCouvrantMin(L) ;
    $LongueurCandidate :=$ longueur$(ReseauCandidat)$;
    for all (a, b) dans L où $a \neq b$ **do**
      On pose c l'image de b par la rotation de $60°$ de centre a
      $R :=$ Steiner$(L \setminus \{a, b\} \cup \{c\})$;
      p est le point relié à c dans R
      $S :=$ Fermat$(a, b, p) \cup R$;
      if longueur$(R) \leq LongueurCandidate$ **then**
        $S := ReseauCandidat$;
        $LongueurCandidate :=$longueur(S) ;
      end if
    end for
  end if

Sortie R : Réseau minimal interconnectant les points de L : Arbre de Steiner





Différents arbres générés, puis comparés

3.3 Complexité de l'algorithme

$$v_n = n \cdot (n-1) \cdot v_{n-1}$$

$$v_n \sim K \cdot n! \cdot (n-1)!$$

Complexité en $\mathcal{O}(n! \cdot (n-1)!)$: Extrêmement peu performant.

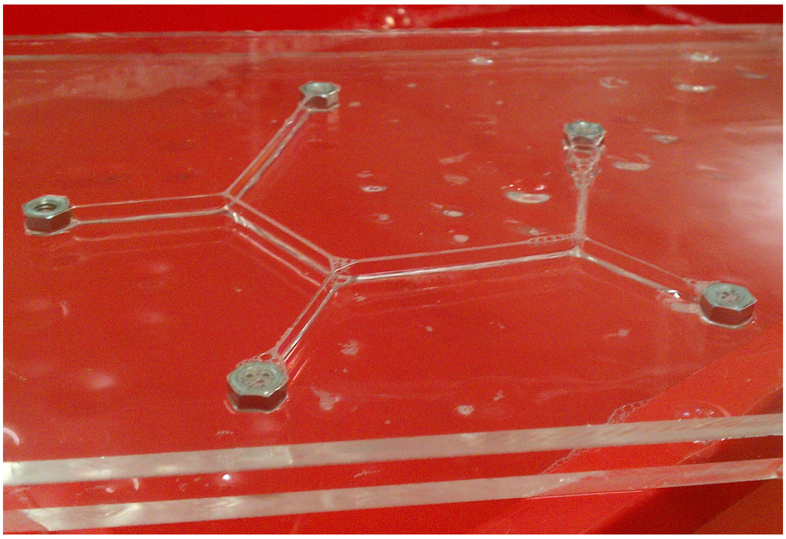
4 Applications

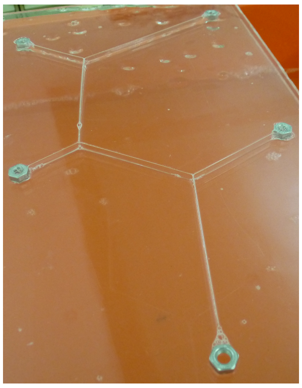
4.1 Bulles de savon : Expérience

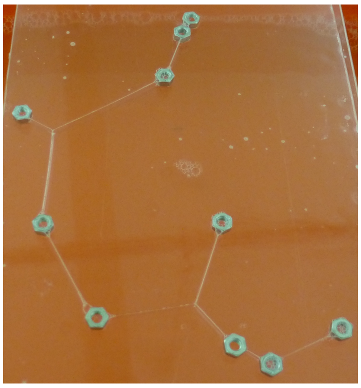
Energie potentielle de cohésion (γ est la tension superficielle du liquide) :

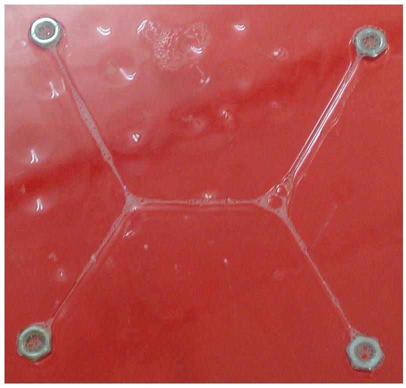
$$E_p = \gamma \cdot S$$

$\Longrightarrow$ Les films de savons tendent vers une **surface minimale**.









4.2 Autres exemples

Alvéoles des ruches d'abeilles : Hexagones : Angles de 120° :

Maximise $\frac{\text{Volume Des Alvéoles}}{\text{Cire Utilisée}}$

Réseaux ferroviaires et routiers

Réseaux électriques, d'aqueducs, d'oléoducs...