# Les points de Steiner dans le plan

Antoine Clausse Ayoub Alami

## Table des matières

# 1 Arbre de Steiner

## 1.1 Définitions

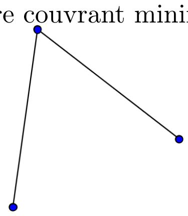
D'après Wikipédia

> L'arbre de Steiner (nommé en référence au mathématicien Jakob Steiner) est un problème d'optimisation combinatoire relativement proche du problème de l'arbre couvrant minimal. Dans les deux problèmes, il s'agit de trouver, étant donné un ensemble V de sommets, un arbre A reliant tous les sommets de V. Alors que dans le problème de l'arbre couvrant minimal, tous les sommets de l'arbre A doivent être dans V, il est autorisé dans le problème de l'arbre de Steiner d'utiliser des points en dehors de V. Dans les deux problèmes, chaque arête a un coût donné. Le coût de l'arbre étant donné par la somme du coût de ses arêtes, il s'agit de trouver l'arbre de coût minimal. [...]
>
> Les nouveaux sommets introduits pour réduire la longueur totale de connexion sont des points de Steiner.

## 1.2 Exemples

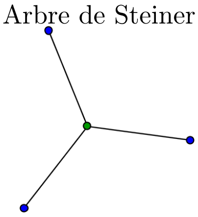
### 1.2.1 Pour un triangle équilatéral de coté 1

Arbre couvrant minimal :



$L = 2$

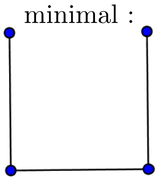
Arbre de Steiner :



$L = \sqrt{3}$

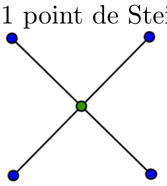
### 1.2.2 Pour un carré de coté 1

Arbre couvrant minimal :



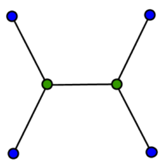
$L = 3$

Avec 1 point de Steiner :



$L = 2\sqrt{2}$

Arbre de Steiner :



$L = 1 + \sqrt{3}$

# 2 Points de Steiner

## 2.1 Point de Steiner d'un triangle quelconque(Point de Fermat ou point de Torricelli)

### 2.1.1 Etude du minimun d'une fonction de 2 variables

Soit l'ensemble $K = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid PA + PB + PC \leq AB + BC + CA\}$, on défini : $\begin{array}{cccc} f: & K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & \|\overrightarrow{PA}\| + \|\overrightarrow{PB}\| + \|\overrightarrow{PC}\| \end{array}$ //

On va chercher à minimiser la fonction $f$ sur $K$. $f$ étant continue sur le compact $K$, elle admet nécessairement (au moins) un minimun. De plus, la foncion $N : \overrightarrow{x} \longmapsto \|\overrightarrow{x}\|$ étant différentiable sur $E\backslash\{0\}$, $f$ l'est sur $\overset{o}{K} \backslash\{A, B, C\}$. Par ailleurs, sur la frontière de $K$, $f$ est constante et vaut $AB + BC + CA$, qui n'est pas le minimum, car supérieur à la valeur de $f$ en chacun des sommets du triangle.

À présent, on cherche les points critiques de la fonction $f$.

$\overrightarrow{grad}N(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$

$\Rightarrow \overrightarrow{grad}f(P) = \frac{\overrightarrow{PA}}{\|\overrightarrow{PA}\|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{\|\overrightarrow{PB}\|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{\|\overrightarrow{PC}\|}$

On pose $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PA}}{\|\overrightarrow{PA}\|}$, $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{Pb}}{\|\overrightarrow{PB}\|}$ et $\vec{w} = \frac{\overrightarrow{PC}}{\|\overrightarrow{PC}\|}$. Ces 3 vecteurs sont normés, si $\overrightarrow{grad}f$ s'annule en $P$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} & = & \vec{0} \\ \vec{u} + \vec{v} & = & -\vec{w} \\ \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + 2\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle & = & \|\vec{w}\|^2 \\ 2\cos(\vec{u}, \vec{v}) & = & -1 \\ (\vec{u}, \vec{v}) & = & \pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \end{array}$$

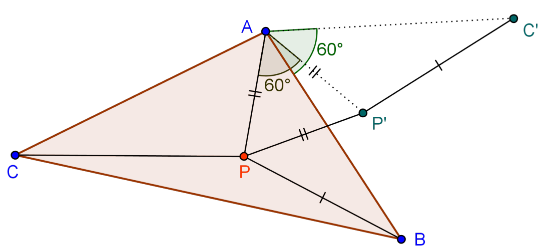
Le résultat est indépendant de la paire de vecteurs choisis. Ainsi, $\overrightarrow{grad}f$ s'annule pour $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120°$. Or, un tel point ne peut exister que si tous les angles du triangles sont inférieur à 120°.

Ainsi, si l'un des angles du triangle est supérieur à 120°, les seuls candidats à l'établissement du minimun sont les sommets du triangles. L'application du théorème d'Al Kashi permet de conclure : **le point de Steiner d'un triangle dont un angle est supérieur à 120° est le sommet en lequel cet angle est réalisé**

### 2.1.2 Triangle dont tous les angles sont inférieurs à 120°

Soit $P$ un point à l'intérieur du triangle.

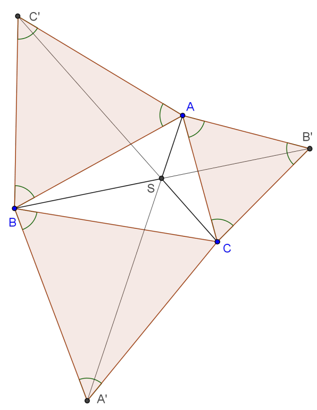
On considère alors l'image de $APB$ par la rotation de centre $A$ et d'angle 60°. On note $AP'C'$ l'image de $APB$ par cette rotation.



Le triangle $PAP'$ est équilatéral ; en effet, par construction il est isocèle et possède un angle de 60°. Donc $PP' = AP$ et, toujours par construction, $C'P' = BP$. On a donc $AP + BP + CP = PP' + P'C' + CP$.

Donc minimiser $CP + AP + BP$ revient à minimiser $CP + PP' + P'C'$. Or cette dernière quantité est minimale si $C'$, $P'$, $P$ et $C$ sont alignés. En effet $C$ et $C'$ (sommet du triangle équilatéral de côté $AB$) sont indépendants du choix de $P$. On doit donc choisir $P$ de sorte que la longueur de la ligne brisée $CPP'C$ soit minimale. Or le chemin le plus court entre $C$ et $C'$ est la ligne droite, donc il faut que $P$ appartienne à la droite $CC'$.

De façon analogue on construit les points $A'$, $B'$. **Le point de Steiner $S$ est alors le point de concours des droites $(AA')$, $(BB')$ et $(CC')$.**




## 2.2 Point(s) de Steiner d'un ensemble de N points

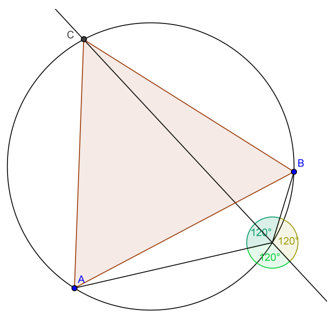
Pour un ensemble de N points, il convient de selectionner des points à apparier, puis à substituer par le sommet d'un triangle équilatéral s'appuyant sur le segment formé par les 2 points. En effet, les droites passant par un sommet ainsi créés sont les droites permettant d'établir les éventuels points de Steiner (angles de 120°)

### 2.2.1 Caractérisation des points de Steiner

En se servant des démonstrations précédentes, on détermine d'un point de Steiner ne peut former d'un angle de 120° avec les points qu'il relie.

Si le point de Steiner $S$ relie 2 points ($A$ et $B$), le segment $[AB]$ constitue un meilleur chemin, le point de Steiner n'a pas lieu d'être

Sinon si $S$ relie des points en formant un angle inférieur à 120° (par exemple l'angle $\widehat{ASB}$, où $A$ et $B$ sont des points relié via $S$), le triangle $ASB$ possède un angle de moins de 120° et un nouveau point de Steiner $S'$ doit être créé.



# 3 Elaboration d'un algorithme de détermination d'un réseau de Steiner

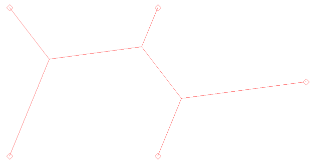
Le problème de Steiner est NP-complet, c'est-à-dire qu'on ne sait pas le résoudre en un temps polynomial du nombre de paramètre (de points). En d'autres termes, le temps nécessaire à sa résolution évolue exponentiellement relativement au nombre de points considérés.

Afin de résoudre, on assimile successivement chaque paires de points $(a, b)$ à un "point équivalent" $c_1$ ou $c_2$ (les sommets du triangle équilatéral s'appuyant sur $[a, b]$), pour opérer réccursivement en faisant décroître le nombre de points étudiés lors des différentes itérations, en s'inspirant de l'algorithme de *Dreyfus-Wagner*. À plusieurs reprise, l'algorithme fait appel à la fonction *Fermat* qui détermine l'arbre de Steiner dans un triangle quelconque.

**Algorithm 1** Détermine le réseau de Steiner minimal d'un ensemble de points

**Entrée(s)** $L$ : un ensemble de points
  $n := nops(L)$
  **if** $n \leq 1$ **then**
    $R := []$
  **else if** $n = 2$ **then**
    $R := [L[1], L[2]]$
  **else if** $n = 3$ **then**
    $R :=$ Fermat($L$)
  **else**
    $Longueur := +\infty$
    **for all** paire $(a, b)$ dans $L$ **do**
      On pose $c_1$ l'image de $b$ par la rotation de 60° de centre $a$
      On pose $c_2$ l'image de $b$ par la rotation de -60° de centre $a$
      **for all** tripartions $(U, V, W)$ dans $L \setminus \{a, b\}$ **do**
        $R_a :=$ Steiner($U \cup \{a\}$)
        $R_b :=$ Steiner($V \cup \{b\}$)
        $R_{c_1} :=$ Steiner($W \cup \{c_1\}$)
        $R_{c_2} :=$ Steiner($W \cup \{c_2\}$)
        $p_1$ est un point relié à $c_1$ dans $R_{c_1}$
        $p_2$ est un point relié à $c_2$ dans $R_{c_2}$
        $R_1 :=$ Fermat$(a, b, p_1) \cup R_a \cup R_b \cup R_{c_1}$
        $R_2 :=$ Fermat$(a, b, p_2) \cup R_a \cup R_b \cup R_{c_2}$
        **if** longueur$(R_1) \leq Longueur$ **then**
          $R := R_1$
        **else if** longueur$(R_2) \leq Longueur$ **then**
          $R := R_2$
        **end if**
      **end for**
    **end for**
  **end if**

**Sortie(s)** $R$ : Réseau minimal interconnectant les points de $L$



Cet algorithme simplifié est très lent, de plus, il calcule à de multiples reprises les mêmes réseaux. La procédure que nous avons réalisé sur Maple est plus performante mais reste très lente. Pour palier à la lenteur de la résolution de ce problème NP-complet, il existe des algorithmes approximant la solution du problème de Steiner, en un temps polynomial quant à eux.

# 4 Applications

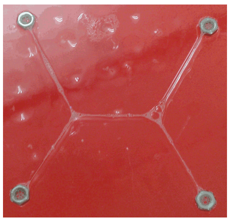
## 4.1 Exemples

Les alvéoles des ruches d'abeilles sont héxagonales, les angles au sommet sont de 120°. Elles permettent de maximiser le volume occupable et le nombre d'alvéoles tout en minimisant la matière utilisée.

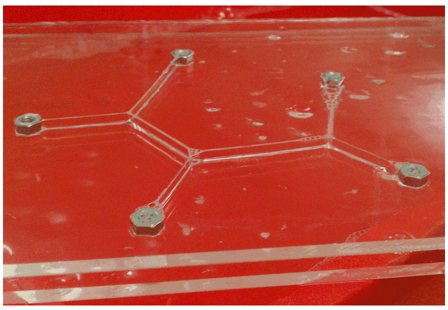
La résolution du problème de Steiner permet de réaliser des économies considérables dans des cas concrets : réseau routier, ferroviaire, électrique, d'aqueducs ou d'oléoducs...

## 4.2 Expérience

Les films de savons sont des surfaces s'organisant de façon à minimiser leur énergie, ce qui nécessite de minimiser leur surface, et qui les conduit, dans certain cas, à fournir une solution du problème de Steiner. Cependant, la structure des films ne constitue qu'un minimum local.



La tendance des surfaces savonneuse à se disposer de façon à former des angles de 120° entre elles est en accord avec les résultats que nous avons établis et correspondent aux simulation effectuées avec Maple.



## 5 Références


**Article :** Mathématiques savonneuses
`http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-savonneuses.html`

**PDF :** Minimisation d'une somme de distances, points de Fermat
`http://desaintar.free.fr/pointsdeFermat.pdf`

**PDF :** Exact Algorithms for the Steiner Tree Problem
`http://doc.utwente.nl/59035/1/thesis_Wang%2C_Xinhui.pdf`

**PDF :** Exact and heuristic algorithms for the Euclidean Steiner tree problem
`http://ir.uiowa.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1940&context=etd`

**Application :** `http://www.math.jussieu.fr/~laurainp/steiner/`

**Wikipédia :** Arbre de Steiner
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_de_Steiner`
(La version anglaise propose un article plus complet)

**Wikipédia :** Point de Fermat
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Fermat`
(La version anglaise propose un article plus complet)